4/5/2018

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Έστω $n \geq 2$ $\sigma \in S_n$. Έστω ότι σ-τροχιές του $A = \{1, \ldots, n\}$ έχουν μήκη $a_1, a_2, \ldots, a_r$ με $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r$. Φανερά $a_1 + \ldots + a_r = n$ και λέμε ότι η διαμέριση του $n$ που αντιστοιχεί στο σ είναι η $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ** $n=5$ $\sigma = (1)\circ(5)\circ(2,3)\circ(4)$ έχουμε $r=4$ σ-τροχιές είναι η $\{1\}$, η $\{4\}$, η $\{5\}$, η $\{2,3\}$ άρα $(a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2)$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**: $n=7$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in S_7$

Οι σ-τροχιές του $A = \{1, \ldots, 7\}$ είναι $\{1,3,2\}$, $\{4\}$, $\{5,6,7\}$ άρα η διαμέριση του 7 είναι η $(1,3,3)$.

<u>Ορισμός</u>: Αν $\sigma \in S_n$, ο $\sigma$ λέγεται αντιμετάθεση αν ο $\sigma$ είναι κύκλος μήκους 2, δηλ. υπάρχουν $a_1 < a_2$ με $\sigma = (a_1, a_2)$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Το $(3,5) \in S_{21}$ είναι αντιμετάθεση
Το $(2,4,6) \in S_{21}$ ΔΕΝ είναι αντιμετάθεση.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Αν $\sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) τότε υπάρχουν αντιμεταθέσεις $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s \in S_n$ ώστε $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_s$

<u>Απόδειξη</u>
Βήμα 1ο
<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1</u>. Υπάρχουν κύκλοι ξένοι ανά δύο $\nu_1, \ldots, \nu_r$ ώστε $\sigma = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \ldots \circ \nu_r$
Απόδειξη (το έχουμε κάνει)
<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2</u> Έστω $r \geq 1$ και $\nu = (a_1, a_2, \ldots, a_r) \in S_n$ κύκλος μήκους $r$. Τότε ο $\nu$ είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων.

Απόδειξη Αν $r = 1$, $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} = (1,2) \circ (1,2)$ και ισχύει. Έστω $r \geq 2$. Τότε ισχύει

(1): $(a_1, a_2, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \circ (a_1, a_{r-1}) \circ \ldots \circ (a_1, a_3) \circ (a_1, a_2)$

Άρα ο κύκλος $\nu$ γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων.

(Απόδειξη σχέσης (1). Έστω $c \in A \in \{1, \ldots, n\}$
Αν $c \neq a_i$ για κάθε $i$ τότε $(a_1, \ldots, a_r)(c) = c$ και $(a_1, a_i)(c) = c$ για κάθε $i$, άρα η (1) ισχύει. Έστω $c = a_i$ με $1 < i < r$. Τότε $(a_1, \ldots, a_r)(c) = a_{i+1}$ και το $a_i$ εμφανίζεται στο $(a_1, a_{i+1}) \circ (a_1, a_i)$ και πηγαίνει πρώτα στο $a_1$ και μετά στο $a_{i+1}$. Άρα η (1) ισχύει.
Έστω $c = a_1$. Τότε $(a_1, \ldots, a_r)(c) = a_2 = (a_1, a_2)(a_1)$ τότε η (1) ισχύει. Παρόμοια και η περίπτωση $c = a_r$.

Παρατήρηση Από την απόδειξη

(1): $(a_1, a_2, \dots, a_r) = (a_1, a_r)\circ(a_1, a_{r-1})\circ(a_1, a_{r-2})\circ \dots \circ(a_1, a_3)\circ(a_1, a_2)$, για $r \geq 2$.

δηλ. όχι απλώς δείξαμε ότι κάθε κύκλος γράφεται σαν γιν αντιμεταθέσεων αλλά η (1) μας λέει και πως.

Παράδειγμα • $\underset{a_1\ a_2\ a_3}{(5, 3, 2)} \overset{(1)}{=} (a_1, a_3)\circ(a_1, a_2) = (5,2)\circ(5,3)$

• $(7,3,11,14,18) = (7,18)\circ(7,14)\circ(7,11)\circ(7,3)$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η γραφή μιας $\sigma \in S_n$ σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων ΔΕΝ είναι μοναδική.

Παράδειγμα 1. $(1,2,3,4) = (1,4)\circ(1,3)\circ(1,2)$

$(2,3,4,1) = (2,1)\circ(2,4)\circ(2,3)$

2. $(1,3) = (1,3)\circ(1,2)\circ(1,2)$

→ Γραφή του (1,3) σαν γινόμενο μιας αντιμετάθεσης

→ Γραφή του (1,3) σαν γινόμενο 3 αντιμεταθέσεων.

Παρατήρηση Έστω $\sigma = (a,b)$ αντιμετάθεση. Τότε

$\sigma^{-1} = (b,a) = (a,b) = \sigma$

Δηλ. $\sigma$ αντιμετάθεση $\Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma$. Άρα $\sigma\circ\sigma = e_{S_n}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $\sigma \in S_n$, με $n \geq 2$. Είδαμε ότι η $\sigma$ γράφεται σαν σύνθεση αντιμεταθέσεων. Έστω μια γραφή έχει $n$ αντιμεταθέσεις, και μια άλλη γραφή $n'$. Τότε $n \equiv n' \bmod 2$. Δηλ. $n$ άρτιος $\Rightarrow n'$ άρτιος

$n$ περιττός $\Rightarrow n'$ περιττός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Δηλ. αφού το (1,3) έχει μία γραφή σαν σύνθεση $n=1$ αντιμεταθέσεων, κάθε γραφή του σαν σύνθεση αντιμεταθέσεων έχει περιττό πλήθος αντιμεταθέσεων.

Ομοίως αφού το $(1,2,3,4)$ έχει γραφή σαν σύνθεση $n=3$ ανειμεταθέσεων και 3 περιττός από το Θεώρημα κάθε γραφή του $(1,2,3,4)$ σαν σύνθεση ανειμεταθέσεων θα έχει περιττό πλήθος ανειμεταθέσεων.

<u>Απόδειξη</u> Έστω ότι δεν ισχύει και $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_{2p}$ και $\sigma = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \ldots \circ \nu_{2e+1}$

με $\mu_i, \nu_j$ ανειμεταθέσεις θα βρούμε αντίφαση

Έστω $I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας στο $\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε $\Gamma_i$ την $i$-γραμμή του $I_n$

Άρα $I_n = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix}$. Συμβολίζουμε $I_\sigma = \begin{bmatrix} \Gamma_{\sigma(1)} \\ \Gamma_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \Gamma_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$

[Παράδειγμα $n=3$ $\sigma = (1,2)$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ αν $\sigma = (1,3,2)$

$$I_\sigma = \begin{bmatrix} \Gamma_{\sigma(1)} \\ \Gamma_{\sigma(2)} \\ \Gamma_{\sigma(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_3 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ]

Αν $\sigma = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \ldots \circ \mu_{2p}$ σημαίνει ότι μπορούμε να πάμε από το $I_n$ στο $I_\sigma$ με άρτιο πλήθος εναλλαγών ζεύγους γραμμών. Άρα $\det I_\sigma = (-1)^{2p} = 1$

Αφού $\sigma = \nu_1 \circ \nu_2 \circ \ldots \circ \nu_{2e+1}$ σημαίνει ότι μπορούμε να πάμε από το $I_n$ στο $I_\sigma$ με περιττό πλήθος εναλλαγών ζεύγους γραμμών. Άρα $\det I_\sigma = (-1)^{2e+1} = -1$

Αντίφαση.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>. Έστω $\sigma \in S_n$. Το $\sigma$ λέγεται ΑΡΤΙΑ ΜΕΤΑΘΕΣΗ αν γράφεται ως σύνθεση άρτιου πλήθους ανειμεταθέσεων ενώ λέγεται ΠΕΡΙΤΤΗ μετάθεση

αν γράφεται σαν σύνθεση περιττού πλήθους αναμεταθέσεων.

<u>Παράδειγμα</u> $e_{S_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1,2)\circ(1,2)$ άρα είναι άρτιος. Έστω $r \geq 2$ και $(a_1,\dots,a_r) \in S_n$ κύκλος μήκους $r$. Αφού από πρόταση $(a_1,\dots,a_r) = \underbrace{(a_1,a_r)\circ(a_1,a_{r-1})\circ\dots\circ(a_1,a_3)\circ(a_1,a_2)}_{r-1 \text{ παράγοντες}}$

<u>Παράδειγμα</u> Είναι η μετάθεση $\sigma = (a_1,\dots,a_5)\circ(b_1,\dots,b_4)\circ(c_1,c_2,\dots,c_6)$ άρτια ή περιττή;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u> Ο $(a_1,\dots,a_5)$ γράφεται με 4 αναμ.
$(b_1,\dots,b_4)$ « « 3 «
$(c_1,\dots,c_6)$ « « 5 «

Άρα ο $\sigma$ γράφεται με $4+3+5=12$ αναμεταθέσεις. Άρα $\sigma$ άρτια μετάθεση.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $n \geq 2$. Στην $S_n$ υπάρχουν $\frac{n!}{2}$ άρτιες μεταθέσεις και $\frac{n!}{2}$ περιττές μεταθέσεις.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $A=$ Σύνολο άρτιων μεταθέσεων
$\Pi=$ « περιττών «

Ξέρουμε (από το Θεώρημα) $A \cap \Pi = \emptyset$, $A \cup \Pi = S_n$ και $\# S_n = n!$. Θα δείξουμε ότι $A$ κ $\Pi$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Αρκεί να ορίσουμε συνάρτηση $f: A \to \Pi$ που είναι 1-1 και επί.
Ορίζουμε $f: A \to \Pi$ $f(\sigma) = (1,2)\circ\sigma$
Η $f$ καλά ορισμένη. Η $f$ 1-1, γιατί $S_n$ ομάδα άρα $f(\sigma) = f(\sigma') \Rightarrow (1,2)\circ\sigma = (1,2)\circ\sigma'$ $\xRightarrow[\text{ΔΙΑΓΡΑΦΗΣ}]{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΑ}}$ $\sigma = \sigma'$
Η $f$ είναι ΕΠΙ γιατί αν $\rho \in \Pi$ τότε $(1,2)\circ\rho \in A$ και $f((1,2)\circ\rho) = (1,2)\circ(1,2)\circ\rho = \rho$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ Έστω $n \geq 2$. Συμβολίζουμε $A_n$ το σύνολο των άρτιων μεταθέσεων της $S_n$.
Είδαμε $|A_n| = \frac{n!}{2}$

ΠΡΟΤΑΣΗ $A_n$ υποομάδα της $S_n$. Ονομάζεται ΕΝΑΛΛΑΣΟΥΣΑ (alternating) υποομάδα της $S_n$.

Απόδειξη $A_n \neq \emptyset$, γιατί $id_{\{1,\dots,n\}} \in A_n$

$$id_{\{1,\dots,n\}} = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

Επειδή $S_n$ πεπερ. ομάδα αρκεί να δείξουμε $\sigma \in A_n$ και $\tau \in A_n \implies \sigma \circ \tau \in A_n$

Αφού $\sigma \in A_n$ $\sigma = \mu_1 \circ \dots \circ \mu_{2\ell}$ με $\mu_i$ αναμεταθέσεις
Αφού $\tau \in A_n$ $\tau = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_{2k}$ με $\rho_i$ <<

Άρα $\sigma \circ \tau = \mu_1 \circ \dots \circ \mu_{2\ell} \circ \rho_1 \circ \dots \circ \rho_{2k}$ και $2k + 2\ell$ άρτιος
Συνεπώς $\sigma \circ \tau$ άρτια, άρα $\sigma \circ \tau \in A_n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $\sigma \in S_n$ με $n \geq 2$. Λέμε ότι η $\sigma$ έχει πρόσημο $\varepsilon(\sigma) = +1$ όταν $\sigma$ άρτια
$\varepsilon(\sigma) = -1$ << $\sigma$ ΠΕΡΙΤΤΗ

ΠΡΟΤΑΣΗ Η (έστω $n \geq 2$) απεικόνιση $\varepsilon : S_n \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ είναι ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα την υποομάδα $A_n$ της $S_n$ και εικόνα την υποομάδα $\{1, -1\}$ του $(\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι αν $\sigma, \tau \in S_n$ τότε (*) $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 $\sigma, \tau$ άρτιες. Τότε $\sigma \circ \tau$ άρτια και $\varepsilon(\sigma) = 1$, $\varepsilon(\tau) = 1$, $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = 1$ άρα η (*) ισχύει.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 $\sigma$ άρτια, $\tau$ ΠΕΡΙΤΤΗ. Τότε $\sigma \circ \tau$ ΠΕΡΙΤΤΗ, γιατί άθροισμα άρτιου και περιττού είναι περιττός. Τότε $\varepsilon(\sigma)=1$, $\varepsilon(\tau)=-1$, $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=-1$ και η (*) ισχύει

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 $\sigma$ περιττή, $\tau$ άρτια. Τότε $\sigma\circ\tau$ περιττή γιατί άθροισμα περιττού και άρτιου είναι περιττός. Τότε $\varepsilon(\sigma)=-1$, $\varepsilon(\tau)=1$ $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=-1$ και η (*) ισχύει

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 $\sigma$ και $\tau$ περιττές. Τότε $\sigma\circ\tau$ άρτια γιατί άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος. Άρα $\varepsilon(\sigma)=-1$, $\varepsilon(\tau)=-1$, $\varepsilon(\sigma\circ\tau)=1$ και η (*) ισχύει

Παράδειγμα 1 $S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=(1,2)\right\}$

$A_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right\}$

Παράδειγμα 2 $S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(2,3),\right.$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(1,3), \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(1,2), \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1,3,2),$

$\left.\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1,2,3)\right\}$

$A_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, (1,3,2), (1,2,3)\right\}$

Παράδειγμα
Βρείτε τα στοιχεία μέγιστης τάξης στις ομάδες $S_7$ και $A_7$.

| ΔΙΑΜΕΡΙΣΗ ΤΟΥ 7 | ΕΙΝΑΙ ΣΤΗΝ $A_7$ | ΤΑΞΗ |
|---|---|---|
| 7 | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π.(7)=7 |
| (1,6) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π.(1,6)=6 |
| (2,5) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π.(2,5)=10 |
| (1,1,5) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π(1,1,5)=5 |
| (3,4) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π.(3,4)=12 |
| (1,2,4) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π(1,2,4)=4 |
| (1,1,1,4) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π.(1,1,1,4)=4 |

| | | |
|---|---|---|
| (1,3,3) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π.(1,3,3) = 3 |
| (1,1,2,3) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π.(1,1,2,3) = 6 |
| (1,1,1,1,3) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π.(1,1,1,1,3) = 3 |
| (2,2,3) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π.(2,2,3) = 6 |
| (1,2,2,2) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π. = 2 |
| (1,1,1,2,2) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π. = 2 |
| (1,1,1,1,1,2) | ΟΧΙ | Ε.Κ.Π. = 2 |
| (1,1,1,1,1,1,1) | ΝΑΙ | Ε.Κ.Π. = 1 |

Συμπέρασμα: Μέγιστη τάξη στην $S_7 = 12$
π.χ. $(1,2,3)(4,5,6,7)$
Μέγιστη τάξη στην $A_7 = 7$
π.χ. $(1,2,3,4,5,6,7)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $(G,*)$ ομάδα, $a \in G$. Ορίζουμε την απεικόνιση συζυγίας $f_a : G \to G$ με $f_a(b) = a*b*a^{-1} \in G$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Η $f_a$ είναι ισομορφισμός ομάδων.

<u>Απόδειξη</u> Ομομ. ομάδων. Έστω $b_1, b_2 \in G$
$f_a(b_1 * b_2) = a * b_1 * b_2 * a^{-1}$
Ενώ $(f_a(b_1)) * (f_a(b_2)) = (a*b_1*a^{-1}) * (a*b_2*a^{-1}) =$
$a*b_1*(a^{-1}*a)*b_2*a^{-1} = a*b_1*e*b_2*a^{-1}$
$= a*b_1*b_2*a^{-1}$. Άρα $f_a$ ομομορφισμός.
$f_a$ 1-1. Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker f_a = \{e_G\}$
Έστω $b \in \ker f_a$. Τότε $f_a(b) = e_G \Rightarrow a*b*a^{-1} = e_G$
$\Rightarrow a^{-1}*(a*b*a^{-1}) = a^{-1}*e_G \Rightarrow b*a^{-1} = a^{-1} \Rightarrow$
$b*a^{-1}*a = a^{-1}*a \Rightarrow b = e_G$

$f_a$ ΕΠΙ. Έστω $\tilde{b} \in G$. Θέτουμε $b = a^{-1}*\tilde{b}*a$
Τότε $f_a(b) = f_a(a^{-1}*\tilde{b}*a) = a*(a^{-1}*\tilde{b}*a)*a^{-1}$
$= (a*a^{-1}) * \tilde{b} * (a*a^{-1}) = e_G * \tilde{b} * e_G = \tilde{b}$, άρα $f$ ΕΠΙ.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Αν $G$ αβελιανή $f_a = id_G$
Πράγματι, για $b \in G$ $f_a(b) = a*b*a^{-1} =$

$a * a^{-1} * b = e * b = b$

## ΣΥΖΥΓΙΑ στην $S_n$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Έστω $n \geq 2$, $r \geq 2$, $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in S_n$ $r$-κύκλος και $\sigma \in S_n$. Τότε $\sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_r))$
(Δηλ. η συζυγία στην $S_n$ στέλνει $r$-κύκλους σε $r$-κύκλους)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> $n=5$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ Τότε

$\sigma \circ (3,4) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(3), \sigma(4)) = (2,3)$ και
$\sigma \circ (1,2,3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)) = (4,1,2)$

<u>ΑΠΟΔ. ΠΡΟΤΑΣΗΣ</u>

Θέτουμε $\mu_A = \sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1} \in S_n$
$\mu_B = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_r))$ Ο.δ.ο. $\mu_A(c) = \mu_B(c)$ για κάθε $c \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

<u>ΠΕΡΙΠΤ. 1</u> $c \notin \{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_r)\}$ Άρα $\mu_B(c) = c$
Αφού $c \neq \sigma(a_i)\ \forall i \Rightarrow \sigma^{-1}(c) \neq a_i\ \forall i$
Άρα $((a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1})(c) = \sigma^{-1}(c) \Rightarrow$
$(\sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1})(c) = c$

<u>ΠΕΡΙΠΤ. 2</u> $c = \sigma(a_i)$ για $i < r$
Τότε $\mu_B(c) = \sigma(a_{i+1})$, ενώ $\mu_A(c) = (\sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1})(\sigma(a_i)) = \sigma(a_{i+1}) = \mu_B(c)$

<u>ΠΕΡΙΠΤ. 3</u> $c = \sigma(a_r)$ Παρόμοια $\mu_B(c) = \sigma(a_1)$
και $\mu_A(c) = \sigma(a_1)$
$\sigma \circ (a_1, \ldots, a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_r))$

<u>Παρατήρηση</u> Πως υπολογίζουμε $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ όταν $\tau, \sigma \in S_n$.
Η πρόταση μας λέει τι γίνεται όταν $\tau$ κύκλος.
Όταν δεν είναι τι κάνουμε;

Απάντηση με παράδειγμα

Έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ και

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Υπολογίστε το $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$

Λύση

$\tau = (1, 3, 2) \circ (4, 5)$. Τότε

$\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ ((1,3,2) \circ (4,5)) \circ \sigma^{-1} =$

$(\sigma \circ (1,3,2) \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ (4,5) \circ \sigma^{-1})$

$= (\sigma(1), \sigma(3), \sigma(2)) \circ (\sigma(4), \sigma(5)) = (3, 2, 5) \circ (4, 1)$

ΠΟΡΙΣΜΑ. Για κάθε $\tau, \sigma \in S_n$ τα στοιχεία $\tau$ και $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ αντιστοιχούν στην ίδια διαμέριση του $n$.